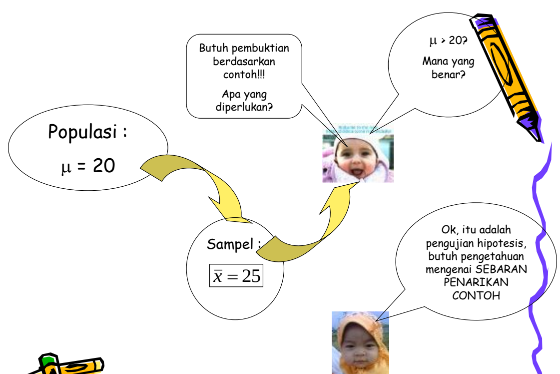
Metode Statistika Pertemuan XI-XII

Statistika Inferensia: Pengujian Hipotesis



Pengujian Hipotesis

- Merupakan perkembangan ilmu experimental
- Menggunakan 2 pendekatan :
  - Metode inferensi induktif → R.A. Fisher
  - Metode teori keputusan → J. Neyman & E.S. Pearson→ mengatasi kekurangan dari metode inferensia induktif

Unsur Pengujian Hipotesis

- Hipotesis Nol
- Hipotesis Alternatif
- Statistik UJi
- Daerah Penolakan H_0

Hipotesis

- ➔ Suatu pernyataan / anggapan yang mempunyai nilai mungkin benar / salah atau suatu pernyataan /anggapan yang mengandung nilai ketidakpastian
- Misalnya:
  - Besok akan turun hujan ➔ mungkin benar/salah
  - Penambahan pupuk meningkatkan produksi ➔ mungkin benar/salah
  - Varietas A lebih baik dibandingkan dengan varietas B ➔ mungkin benar/salah

Hipotesis Statistik

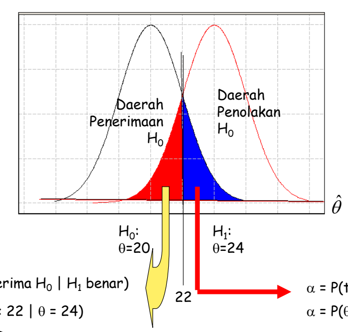
Suatu pernyataan tentang nilai suatu parameter populasi

- H_0 (hipotesis nol): suatu pernyataan yang bersifat "status quo" (tidak ada beda , tidak ada perubahan)
- H_1 (hipotesis tandingan): pernyataan lain yang akan diterima jika H_0 ditolak ("ada" perbedaan, "terdapat perubahan")

Dalam pengambilan keputusan memungkinkan untuk terjadi kesalahan

	H_0 benar	H_0 salah
Tolak H_0	Peluang salah jenis I (Taraf nyata; α)	Kuasa pengujian ($1-\beta$)
Terima H_0	Tingkat kepercayaan ($1-\alpha$)	Peluang salah jenis II (β)

P(salah jenis I) = P(tolak H_0/H_0 benar) = α
P(salah jenis II) = P(terima H_0/H_1 benar) = β



β = P(Terima H_0 | H_1 benar)
β = P(θ < 22 | θ = 24)

α = P(tolak H_0 | H_0 benar)
α = P(θ > 22 | θ = 20)

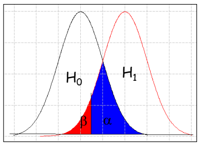
θ Merupakan sembarang parameter

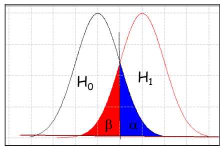
Teladan (1)

Sampel diambil secara acak dari populasi normal(μ;σ^2 = 9), berukuran 25.
Hipotesis yang akan diuji,
H_0 : μ = 15
H_1 : μ = 12.5
Tolak H_0 jika rata-rata kurang dari atau sama dengan 13.5
Berapakah besarnya kesalahan jenis I dan II ?
Jawab:
P(salah jenis I) = P(tolak H_0|μ = 15) = P(z $\le$ (13.5-15)/3/$\sqrt{25}$))
= P(z $\le$ - 2.5) = 0.0062

P(salah jenis II) = P(terima H_0|μ = 10) = P(z $\ge$ (13.5-12.5)/3/$\sqrt{25}$))
= P(z $\ge$ 1.67) = 1 - P(z $\le$ 1.67) = 1 - 0,9525
= 0.0475

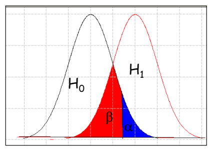
Sifat α dan β





$\alpha\uparrow \;\rightarrow\; \beta\downarrow$

$\alpha\downarrow \;\rightarrow\; \beta\uparrow$



Jika n $\uparrow \rightarrow \alpha$ dan β akan menurun

Hipotesis yang diuji

$H_0 : \theta = \theta_0$
$H_1 : \theta \neq \theta_0$

$H_0 : \theta \geq \theta_0$
$H_1 : \theta < \theta_0$

$H_0 : \theta \leq \theta_0$
$H_1 : \theta > \theta_0$

Hipotesis DUA arah

Hipotesis SATU arah

Statistik uji : $v = \dfrac{\hat{\theta}}{s_{\hat{\theta}}}$

θ merupakan sembarang parameter

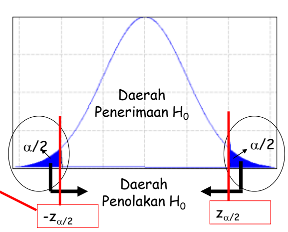
v merupakan sembarang statistik uji

Wilayah kritik
Daerah Penolakan H_0

Tergantung dari H_1. Misalkan w = z ~ N (0,1)

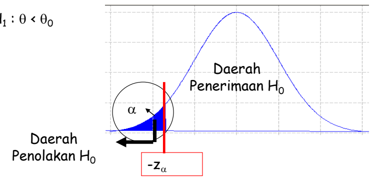
$H_1 : \theta \neq \theta_0$

Nilai kritik



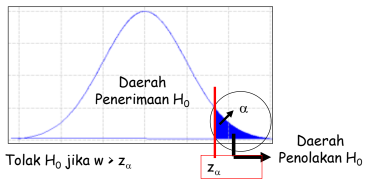
Tolak H_0 jika $w < -z_{\alpha/2}$ atau $w > z_{\alpha/2}$

$H_1 : \theta < \theta_0$



Tolak H_0 jika $w < -z_{\alpha/2}$

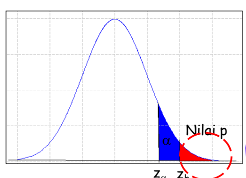
$H_1 : \theta > \theta_0$



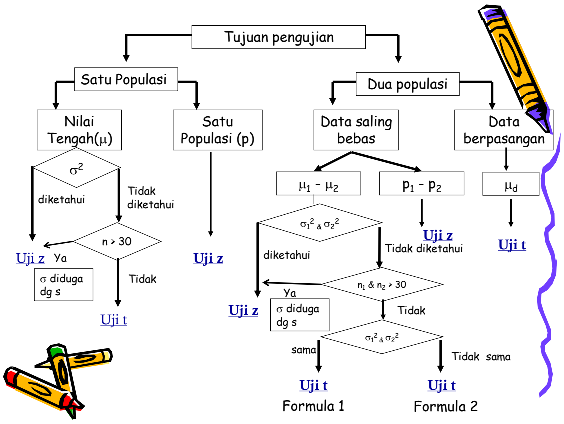
Tolak H_0 jika $w > z_\alpha$

α & nilai p

- α = taraf nyata dari uji statistik
- Nilai p = taraf nyata dari contoh → peluang → merupakan suatu ukuran "kewajaran" untuk menerima H_0 atau menerima H_1
- Jika nilai p < α maka Tolak H_0



Nilai p = P (Tolak H_0 | contoh)
Misalnya : nilai p = $P(Z > z_h)$



Uji Nilai Tengah Populasi (μ)

Hipotesis yang dapat diuji:

Hipotesis satu arah
- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$

Hipotesis dua arah
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- Statistik uji:
  - Jika ragam populasi (σ^2) diketahui atau n > 30 : $z_h = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$
  - Jika ragam populasi (σ^2) tidak diketahui dan n ≤ 30 :

$$t_h = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Teladan (2)

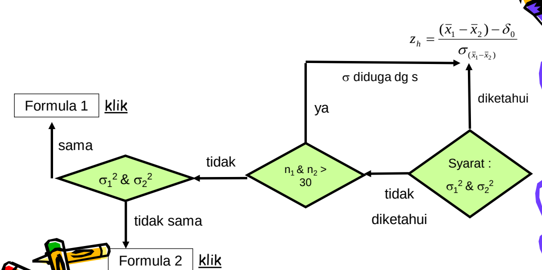
Batasan yang ditentukan oleh pemerintah terhadap emisi gas CO kendaraan bermotor adalah 50 ppm. Sebuah perusahaan baru yang sedang mengajukan ijin pemasaran mobil, diperiksa oleh petugas pemerintah untuk menentukan apakah perusahaan tersebut layak diberikan ijin. Sebanyak 20 mobil diambil secara acak dan diuji emisi CO-nya. Dari data didapatkan rata-ratanya 55 dan ragamnya 4.2. Dengan menggunakan taraf nyata 5%, layakkah perusahaan tersebut mendapat ijin?

Pengujian Hipotesis untuk selisih dua nilai tengah populasi

Hipotesis

- Hipotesis satu arah:
  - H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$
  - H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$
- Hipotesis dua arah:
  - H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

Statistik uji



Formula 1

a. Jika σ_1 dan σ_2 tdk diketahui dan diasumsikan sama:

$$t_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

$$\boxed{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{s_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$\boxed{s_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{dan} \quad v = n_1 + n_2 - 2}$$

Formula 2

b. Jika σ_1 dan σ_2 tdk diketahui dan diasumsikan tidak sama:

$$t_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

$$\boxed{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)}}$$

$$\boxed{v = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2 \right)^2}{\left[\left(s_1^2/n_1 \right)^2 / (n_1 - 1) \right] + \left[\left(s_2^2/n_2 \right)^2 / (n_2 - 1) \right]}}$$

Taladan (3)

Dua buah perusahaan yang saling bersaing dalam industri kertas karton saling mengklaim bahwa produknya yang lebih baik, dalam artian lebih kuat menahan beban. Untuk mengetahui produk mana yang sebenarnya lebih baik, dilakukan pengambilan data masing-masing sebanyak 10 lembar, dan diukur berapa beban yang mampu ditanggung tanpa merusak karton. Datanya sebagai berikut:

Perush A	30	35	50	45	60	25	45	45	50	40
Perush B	50	60	55	40	65	60	65	65	50	55

- Ujilah karton produksi mana yang lebih kuat dengan asumsi ragam kedua populasi berbeda, gunakan taraf nyata 10%!

Teladan (4)

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui rataan waktu yang dibutuhkan (dalam hari) untuk sembuh darisakit flu. Terdapat dua grup, satu grup sebagai kontrol dan grup lainnya diberi vitamin C dengan dosis 4 mg/hari. Statistik yang diperoleh dari peneltian tersebut sebagai berikut :

	Perlakuan	
	Kontrol	Vitamian C : 4 mg
Ukuran contoh	35	35
Rataan contoh	6.9	5.8
Simpangan baku contoh	2.9	1.2

- Ujilah apakah rata-rata lama waktu sembuh untuk grup yang diberi vitmin C lebih pendek dibandingkan grup kontrol! Asumsikan data menyebar normal dengan ragam tidak sama dan gunakan α=5%

*Sumber : Mendenhall, W (1987)

Pengujian Hipotesis untuk data berpasangan

Hipotesis

- Hipotesis satu arah:

  H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

  atau

  H_0: $\mu_D \geq \delta_0$ vs H_1: $\mu_D < \delta_0$

  H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

  atau

  H_0: $\mu_D \leq \delta_0$ vs H_1: $\mu_D > \delta_0$

- Hipotesis dua arah:

  H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

  atau

  H_0: $\mu_D = \delta_0$ vs H_1: $\mu_D \neq \delta_0$

Statistik uji :

$$t_h = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s / \sqrt{n}}$$

Teladan (5)

Suatu klub kesegaran jasmani ingin mengevaluasi program diet, kemudian dipilih secara acak 10 orang anggotanya untuk mengikuti program diet tersebut selama 3 bulan. Data yang diambil adalah berat badan sebelum dan sesudah program diet dilaksanakan, yaitu:

Berat Badan	Peserta									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sebelum (X1)	90	89	92	90	91	92	91	93	92	91
Sesudah (X2)	85	86	87	86	87	85	85	87	86	86
D=X1-X2	5	3	5	4	4	7	6	6	6	5

Apakah program diet tersebut dapat mengurangi berat badan minimal 5 kg? Lakukan pengujian pada taraf nyata 5%!

Penyelesaian

- Karena kasus ini merupakan contoh berpasangan, maka:
- Hipotesis:

  $H_0 : \mu_D \geq 5$ vs $H_1 : \mu_D < 5$
- Deskripsi:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{51}{10} = 5{,}1 \qquad s_d^2 = \frac{n\sum d_i^2 - \left(\sum d_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{10(273) - (51)^2}{10(9)} = 1{,}43$$

$$s_d = \sqrt{1{,}43} = 1{,}20$$

- Statistik uji:

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{5{,}1 - 5}{1{,}20 / \sqrt{10}} = 0{,}26$$

- Daerah kritis pada α=5%

  Tolak H_0, jika $t_h < -t_{(\alpha=5\%, db=9)} = -1.833$

- Kesimpulan:

  Terima H_0, artinya program diet tersebut dapat mengurangi berat badan minimal 5 kg